**Объёмы подобных тел**

***Подобность многогранников.***

***Два многогранника называются подобными, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани.***

Соответственные элементы подобных многогранников называются ***сходственными***. У подобных многогранников двугранные углы равны и одинаково расположены; сходственные рёбра пропорциональны.

***Если в пирамиде проведём секущую площадь параллельно основанию, то она отсечёт от неё другую пирамиду, подобную данной.***

***Поверхности подобных многогранников относятся, как квадраты сходственных линейных элементов многогранников.***

***Объёмы подобных многогранников относятся как кубы сходственных линейных элементов этих многогранников.***

***Квадраты объёмов подобных многогранников относятся как кубы площадей сходственных граней.***

***Подобные цилиндры и конусы.***

Два цилиндра, конуса или усечённых конуса называются подобными, если подобны их осевые сечения.

***Боковые и полные поверхности подобных цилиндров, конусов и усечённых конусов относятся, как квадраты их сходственных линейных элементов.*** (радиусов оснований, высот, образующих).

***Объёмы подобных тел.***

Пусть  *Т*  и  *Т'*– два простых подобных тела. Это означает, что существует преобразования подобия, при котором тело  *Т*  переходить в тело  *Т'*. Обозначим через  *k*  коэффициент подобия.

Разобьём тело  *Т*  на треугольные пирамиды    
 *Р*1, *Р*2, …, *Рn* …   
  
Преобразования подобия, которое переводит тело  *Т*  в  тело  *Т'*  переводит пирамиды    
 *Р*1, *Р*2, …, *Рn*  в пирамиды  *Р*1*'*, *Р*2*'*, …, *Рn'*.   
  
Эти пирамиды составляют тело  *Т'*  и поэтому объём тела  *Т'*  равен сумме объёмов пирамид    
 *Р*1*'*, *Р*2*'*, …, *Рn'*.

Так как пирамиды  *Р*1*'*и  *Р*1  подобны и коэффициент подобия равен  *k*, то и отношение их высот равно  *k*, а отношение площадей их оснований равно  *k*2. Поэтому, отношение объёмов пирамид равно  *k*3. Так как тело  *Т*  состоит из пирамид  *Р*1, а тело  *Т'*  состоит из пирамид  *Р*1*'*, то отношение объёмов тел  *Т'*  и  *Т*  тоже равно  *k*3.

Число  *k*  – коэффициент подобия – равен отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразования подобия. Поэтому, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел  *Т'*  и  *Т*. Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

***Объёмы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.***

***Квадраты объёмов подобных тел относятся, как кубы площадей соответствующих граней.***

***Объёмы подобных цилиндров, конусов и усечённых конусов относятся, как кубы их соответствующих линейных элементов*** **(*радиусов оснований, высот, образующих*)*.***

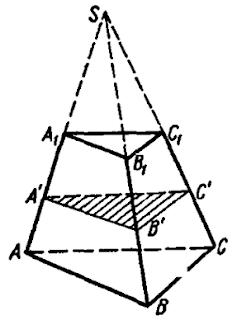
***Объёмы шаров относятся, как кубы их радиусов или диаметров.***

**ЗАДАЧА:**

*Площади оснований усечённой пирамиды  S*1*и  S*2*, а её объём равен  V. Определить объём полной пирамиды.*

**РЕШЕНИЕ:**

*Пусть  S*1*> S*2*. Обозначим объём полной пирамиды через  V*1*, а объём пирамиды, дополняющей данную усечённую пирамиду до полной, через  V*2

[](https://2.bp.blogspot.com/-JwNFcFVEJpo/W6hEuq4sq5I/AAAAAAAAl6M/oMpCYpmoAqMTOyeO7NSiuk93OJ8nMzdNACLcBGAs/s1600/0.png)

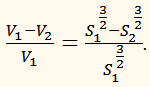
*Тогда*:

[https://1.bp.blogspot.com/-7VqZ758cXB4/W6hFAGGjPzI/AAAAAAAAl6U/1xhLG-zp0CUiFNxFIVPft_pb8Fu1h_XhwCLcBGAs/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-7VqZ758cXB4/W6hFAGGjPzI/AAAAAAAAl6U/1xhLG-zp0CUiFNxFIVPft_pb8Fu1h_XhwCLcBGAs/s1600/0.png)

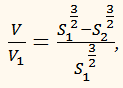
*или*

*[](https://2.bp.blogspot.com/-NoAC3X9KdCE/W6hFLEZcvyI/AAAAAAAAl6Y/FqnjT3L0rzYivhkizDAi1LFjcWdLB_GBgCLcBGAs/s1600/0.png)*

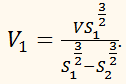
*Составляя производную пропорцию, получим*:

[](https://3.bp.blogspot.com/-AUYBcDPJzsI/W6hFXp2WsCI/AAAAAAAAl6g/rsd5pI1XB-szz0ZNmBKeXl5VZHtMCL8DwCLcBGAs/s1600/0.png)

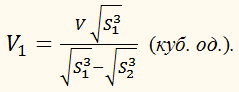
*С учётом   V*1 – *V*2= *V, находим*:

[](https://1.bp.blogspot.com/-MiDuPgSyQjg/W6hFmHHfaFI/AAAAAAAAl6o/Id62yJLH6_oaAB-HU0fsgHa-rvpsym1EACEwYBhgL/s1600/0.png)

*откуда*:

[](https://1.bp.blogspot.com/-xaJ3nxoVd28/W6hF7LVpsHI/AAAAAAAAl60/wHlSTiNdqQ0ntxMTgAz4zcuHlabIbdajQCLcBGAs/s1600/0.png)

**ОТВЕТ:**

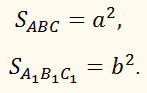
**[](https://3.bp.blogspot.com/-ZzbOC3pg49k/W6hGD9PT6BI/AAAAAAAAl64/Pf4-k1ZLnVwgUUGrcAe4ba4oA-NyO6jWgCLcBGAs/s1600/0.png)**

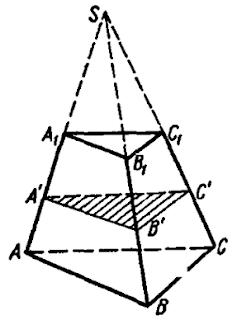
**ЗАДАЧА:**

*Площади оснований усечённой пирамиды равны  а*2*и  b*2*. Найти площадь сечения, которое параллельно площадям оснований усечённой пирамиды и делящего её объём пополам.*

**РЕШЕНИЕ:**

*В усечённой пирамиде  АС*1(*для простоты рисунка рассматривается треугольная пирамида*)*дано*:

[](https://4.bp.blogspot.com/-fpp-gYUq58c/W6hGSuai0ZI/AAAAAAAAl7A/93O2b2FLYwwOHYf7gQJ40Z4y7zc1l8oswCLcBGAs/s1600/0.png)

[](https://2.bp.blogspot.com/-JwNFcFVEJpo/W6hEuq4sq5I/AAAAAAAAl6M/oMpCYpmoAqMTOyeO7NSiuk93OJ8nMzdNACLcBGAs/s1600/0.png)

*Необходимо найти площадь сечения  А'В'С'*(*пл. АВС*∥ *пл. А'В'С'*)*, которое делит усечённую пирамиду на равновеликие по объёму части.*

*Дополним усечённую пирамиду до полной. Пирамиды*

*SАВС, SА'В'С', SA*1*B*1*C*1*–*  
 *подобные.*

*Обозначим площадь искомого сечения  А'В'С'  через  х*2*, а объёмы пирамид*  
 *SАВС, SА'В'С'  и  SA*1*B*1*C*1  
 *соответственно Va, Vx, Vb. Тогда*:

[https://1.bp.blogspot.com/-wEDHbjnPVIU/W6hHAo0jS0I/AAAAAAAAl7M/lPAZr3sEGooZqWxMYKPmlA4tvdRhRkwwQCLcBGAs/s1600/0.png](https://1.bp.blogspot.com/-wEDHbjnPVIU/W6hHAo0jS0I/AAAAAAAAl7M/lPAZr3sEGooZqWxMYKPmlA4tvdRhRkwwQCLcBGAs/s1600/0.png)

*или*

*[https://3.bp.blogspot.com/-1wG40B3mzqg/W6hHMOqbV0I/AAAAAAAAl7Q/vl26X9fXmIIPiKeUhPm9LYowJzx9KTyTACLcBGAs/s1600/0.png](https://3.bp.blogspot.com/-1wG40B3mzqg/W6hHMOqbV0I/AAAAAAAAl7Q/vl26X9fXmIIPiKeUhPm9LYowJzx9KTyTACLcBGAs/s1600/0.png)*

*где  t – некоторое число, которое обозначает величину этих отношений. Тогда*:

*Va = a*3*t*,  *Vx = x*3*t,  Vb = b*3*t.*

*По условию задачи*:

*Va –* *Vx = Vx –* *Vb,*

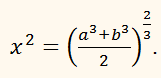
*или*

*a*3*t – x*3*t = x*3*t – b*3*t,*

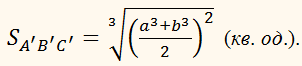
*откуда*:

2*x*3*= a*3*+ b*3*.*

*поэтому,*

*[](https://1.bp.blogspot.com/-QURxsNR8axA/W6hHlCJm3dI/AAAAAAAAl7c/P2BuWbhZMeACAYIM2Og4oVidQq8EfyU-QCLcBGAs/s1600/0.png)*

**ОТВЕТ:**

**[](https://3.bp.blogspot.com/-j-TnZycTmQI/W6hH5UOecXI/AAAAAAAAl7k/eYB4v_8VHLskqLI0mRJW7N-dNPbmTQ9IwCLcBGAs/s1600/0.png)**